Dodatna nastava iz programiranja 2008/2009
Prirodno Matematički Fakultet, Niš
datum: 22. novembar 2008. godine
predavač: Nikola Milosavljević
e-mail: nikola5000@gmail.com

Osnovni geometrijski algoritmi - teorija

1 Osnovni geometrijski objekti

Rastojanje između tačaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ u koordinatnoj ravni jednako je

$$Dist(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \tag{1}$$

Jednačina kružnice: Tačka $M(x, y)$ pripada kružnici sa centrom u tački $C(x_C, y_C)$ i poluprečnikom $r > 0$ ako i samo ako važi

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \tag{2}$$

Tačka $M(x, y)$ se nalazi unutar (van) kružnice ako u gornjoj jednakosti umesto znaka ” $=$ ” stoji znak ” $<$ ” (” $>$ ”). Jednačina (2) predstavlja jednačinu kružnice sa centrom u tački $C(x_C, y_C)$ i poluprečnikom $r > 0$.

Jednačina prave: Tačka $M(x, y)$ pripada pravoj p određenom (različitim) tačkama $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$, u oznaci $p(M_1M_2)$, ako i samo ako važi

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0 \tag{3}$$

Ako označimo sa $f(x, y)$ levu stranu jednačine (3) onda je za $f(x, y) > 0$ položaj tačke $M(x, y)$ sa jedne strane prave p, dok je za $f(x, y) < 0$ tačka $M(x, y)$ sa suprotne strane prave p.

Sređivanjem jednačine (3) i uvodeći smene $a = y_2 - y_1$, $b = -(x_2 - x_1)$ i $c = y_1x_2 - x_1y_2$ dobijamo njoj ekvivalentnu jednačinu (**implicitni oblik prave**):

$$ax + by + c = 0 \tag{4}$$

Jednačina (3), tj. (4), predstavljaja jednačinu prave p određenu tačkama $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$.

Pripadnost duži: Tačka $M(x, y)$ pripada duži čije su krajnje tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$, u oznaci $d[M_1M_2]$, ako i samo ako važi jednačina (3) i važi

$$min(x_1, x_2) \leq x \leq max(x_1, x_2), \qquad min(y_1, y_2) \leq y \leq max(y_1, y_2) \tag{5}$$

tj. tačka M mora da pripada odgovarajućoj pravoj i da se nalazi između tačaka M_1 i M_2.

2 Osobine i odnosi između geometrijskih objekta

Rastojanje između tačke $M(x,y)$ **i prave** $p(M_1M_2)$ jednako je

$$Dist(M,p) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{6}$$

gde su a, b i c odgovarajući koeficijenti iz jednačine (4).

Eksplicitni oblik prave: Svaka prava p, određena tačkama $M_1(x_1,y_1)$ i $M_2(x_2,y_2)$, koja nije normalna na x-osu, može se na jedinstven način predstaviti u obliku $y = kx+n$, gde je k **koeficijent pravca** a n presek prave p sa y-osom i važi

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad n = \frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1} \tag{7}$$

Paralelnost pravih: Prave $p_1(A,B)$ i $p_2(C,D)$ su paralelne ako i samo ako važi

$$(y_B-y_A)(x_D-x_C)-(y_D-y_C)(x_B-x_A)=0 \tag{8}$$

Za koeficijente pravca paralelnih pravih p_1 i p_2 važi $k_1=k_2$.

Normalnost pravih: Prave $p_1(A,B)$ i $p_2(C,D)$ su normalne ako i samo ako važi

$$(y_B-y_A)(y_D-y_C)+(x_B-x_A)(x_C-x_D)=0 \tag{9}$$

Za koeficijente pravca normalnih pravih p_1 i p_2 važi $k_1k_2=-1$.

Presek dve duži: Duži $d[AB]$ i $d[CD]$ mogu da imaju zajedničkih unutrašnjih tačaka, da jedna od krajnjih tačaka jedne duži pripada drugoj duži ili da nemaju zajedničkih tačaka. Ako označimo sa $f(M,M_1M_2)$ levu stranu jednačine (3) (provera da li tačka M pripada pravoj $p(M_1M_2)$) onda važi:

Duži $d[AB]$ i $d[CD]$ imaju zajedničkih tačaka ako i samo ako jedna od krajnjih tačaka jedne duži pripada drugoj duži (provera na osnovu jednačina (3) i (5)) ili ako važi:

$$f(A,CD)f(B,CD)<0 \quad i \quad f(C,AB)f(D,AB)<0 \tag{10}$$

Površina prostog poligona $M_1M_2\dots M_n$ (ne nužno konveksnog) jednaka je

$$\frac{1}{2}|\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})(y_i+y_{i+1})| \tag{11}$$

gde je $(x_{n+1},y_{n+1})=(x_1,y_1)$. Specijalno, za $n=3$, posle sređivanja dobijamo izraz za površinu trougla:

$$P_{\triangle M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2| \tag{12}$$

3 Vektori

Ako sa O označimo koordinatni početak, onda za svaku tačku $M(x, y)$, vektor $\overrightarrow{OM}$ možemo predstaviti samo kao (x, y). Proizvoljni vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ možemo translirati do koordinatnog početka i, prema tome, možemo ga predstaviti u obliku $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Intenzitet vektora (x, y) jednak je $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, u oznaci $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, je realan broj $a = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}| \cos\theta$ gde je θ ugao između ta dva vektora. Ako je $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)$ a $\overrightarrow{CD} = (x_2, y_2)$ tada je

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x_1x_2 + y_1y_2 \tag{13}$$

Vektorski proizvod vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, u oznaci $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$, je vektor $\overrightarrow{v}$ koji je normalan na ravan određenu vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, čiji je pravac određen pravilom desnog zavrtnja u odnosu na pomenute vektore i čiji je intenzitet $|\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|| \sin\theta|$ gde je θ ugao između ta dva vektora. Ako je $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)$ a $\overrightarrow{CD} = (x_2, y_2)$ tada je

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}| = |\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}| = |x_1y_2 - y_1x_2| \tag{14}$$

Desna strana jednačine (14) predstavlja dvostruku površinu trougla određenog vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ dovođenjem na zajednički početak.

Od značaja nam je ne samo vrednost već i znak izraza iz jednačine (14) pa ćemo nadalje sa $VP(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ označavati vrednost desene strane bez apsolutne vrednosti u jednačini (14).

Korišćenjem vektorskog i skalarnog porizvoda dobijamo:

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su normalni akko je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Koristeći da je $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ i $\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C, y_D - y_C)$ i jednačinu (13) dobijamo uslov kao u jednačini (9).

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su paraleni akko je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = 0$. Koristeći da je $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ i $\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C, y_D - y_C)$ i jednačinu (14) dobijamo uslov kao u jednačini (8).

Tačke A, B i C su kolinearne akko je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$. Koristeći da je $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ i $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A)$ i jednačinu (14) dobijamo uslov kao u jednačini (3).

Površina trougla $\triangle ABC$ jednaka je $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Koristeći jednačinu (14) dobijamo formulu (12).

Linija $M_0M_1M_2$ skreće ulevo (udesno) akko je $VP(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}) > 0$ $(VP(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}) < 0)$.